Kvadratické rovnice

Teorie

Kvadratickou rovnicí nazýváme každou rovnici danou vztahem

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, kde a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$. V této rovnici

ax^2 nazýváme **kvadratický člen**, bx **lineární člen** a c **absolutní člen**.

Počet řešení kvadratické rovnice udává **diskriminant** $D = b^2 - 4ac$.

Je-li $D > 0$, má kvadratická rovnice 2 kořeny,

které určíme pomocí vzorce $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Je-li $D = 0$, má kvadratická rovnice jeden (dvojnásobný) kořen $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$.

Je-li $D < 0$, nemá kvadratická rovnice reálné kořeny.

a Je-li v kvadratické rovnici $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$, pak má tvar $ax^2 + bx = 0$

a nazývá se **kvadratická rovnice bez absolutního členu**.

Kořeny této rovnice jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = \dfrac{-b}{a}$.

b Je-li v kvadratické rovnici $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$,

pak má tvar $ax^2 + c = 0$ a nazývá se **ryze kvadratická rovnice**.

Kořeny této rovnice jsou $x_1 = +\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ a $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

c Je-li v kvadratické rovnici $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, pak má rovnice tvar

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ a nazývá se **úplná kvadratická rovnice**.

Kořeny této rovnice jsou $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Příklad 1

Zadání: Určete kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 3x - 10 = 0$ v oboru reálných čísel.

Řešení bez pomoci kalkulátoru:

$a = 1$, $b = -3$, $c = -10$

Určíme diskriminant pomocí vztahu $D = b^2 - 4ac$.

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$

Diskriminant je větší než nula, tedy rovnice má dva reálné kořeny, které vypočítáme pomocí vztahu

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

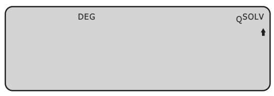
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Zkouška: pro $x_1 = 5$: $L = 5^2 - 3 \cdot 5 - 10 = 0$, $P = 0$, $L = P$
pro $x_2 = -2$: $L = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 10 = 0$, $P = 0$, $L = P$

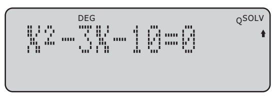
Odpověď: Kořeny kvadratické rovnice jsou 5 a −2.

Řešení s pomocí kalkulátoru:

MODE ▸ ▸ ▸ ENTER

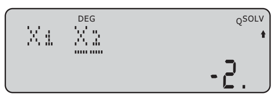


2nd [X] x^2 − 3
2nd [X] − 10 2nd [=] 0



ENTER

▸



Pozn. Na počátku vycházíme z 0) Mode, což je nastavení pro běžné výpočty. Mode 3) Q SOLV umožnuje řešit kvadratické rovnice.

Příklad 2

Zadání: Obsah obdélníku je 91 cm². Určete jeho rozměry, je-li jeho šířka o 6 cm kratší než délka.

Řešení bez pomoci kalkulátoru:

$b = a + 6$ ... vztah mezi stranami obdélníku

$a \cdot b = S$ ... vztah pro obsah obdélníku

$$a \cdot (a + 6) = 91$$

$$a^2 + 6a = 91$$

$$a^2 + 6a - 91 = 0 \quad \text{...kvadratická rovnice}$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-91) = 36 + 364 = 400$$

$$a_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 + 20}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$a_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 - 20}{2} = \frac{-26}{2} = -13$$

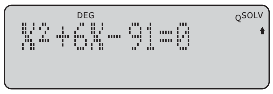
(a_2 není řešením, strana nemůže být záporná)

$b = a_1 + 6 = 7 + 6 = 13$

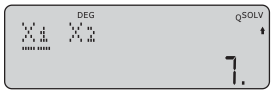
Odpověď: Obdélník má šířku 7 cm a délku 13 cm.

Řešení s pomocí kalkulátoru:

2nd [X] x^2 + 6 2nd [X] − 91 2nd [=] 0

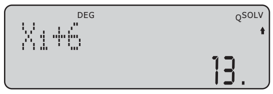


ENTER



▶

◀ + 6 ENTER



Pozn. Na počátku vycházíme už z nastavení Mode 3) Q SOLV.

Cvičení

Cvičení 1: Určete kořeny kvadratické rovnice v oboru reálných čísel:

a) $8x^2 - 16x = 0$ **b)** $25x^2 - 9 = 0$

Odpověď: **a)** $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ **b)** $x_1 = 0{,}6$, $x_2 = -0{,}6$

Cvičení 2: Jsou dána dvě čísla. Součet prvního čísla a dvojnásobku druhého je 16 a součin čísel je 14. Určete tato čísla.

Odpověď: Úloha má dvě řešení. Hledanými čísly jsou buď 1 a 14, nebo 2 a 7.

Cvičení 3: Povrch hranolu se čtvercovou podstavou je 64 cm². Určete délky hran, je-li výška o 10 cm delší než podstavná hrana.

Odpověď: Hranol má délku podstavné hrany $\frac{4}{3}$ cm a výšku $\frac{34}{3}$ cm.

Poznámky